

GAS Oltre a non avere una forma propria, i gas non hanno neppure un volume proprio, vale a dire che occupano tutto il volume del recipiente nel quale sono contenuti. Nell'adattarsi al volume che occupano i gas modificano la loro pressione.

Ne consegue che al variare della temperatura, oltre al volume, varia anche la pressione. Le corrispondenti leggi che regolano la dilatazione, pur essendo formalmente molto analoghe a quelle dei solidi e dei liquidi, risultano più complesse.

GAS PERFETTI Si definisce gas perfetto un gas composto da atomi elementari che non interagiscono uno con l'altro ed è quindi molto rarefatto.

GAS REALI Il gas perfetto non esiste, la maggior parte dei gas reali, che sono lontani dal punto di liquefazione, hanno tuttavia un comportamento molto simile a quello dei gas perfetti, in particolare idrogeno ed elio. Le leggi che valgono per i gas ideali, andranno in qualche modo adattate per quelli reali.

STATO termodinamico Si definisce come l'insieme dei valori P,V,t caratteristici di un gas

P= pressione [Pa]
 V=Volume [m³]
 t= temperatura°C
 T= temperatura°K

Il Sistema internazionale prevede l'utilizzo del °Kelvin, è tuttavia possibile utilizzare anche il °Celsius; in questo caso tuttavia le formule cambiano struttura e diventano più complicate

TRASFORMAZIONE termodinamica: Quando almeno due dei tre valori P,V,t cambiano

ELEMENTARE Quando cambiano solo due dei tre valori P,V,t

→ **ISOTERMICA** t = costante, cambiano P e V

$V = V_0 P_0 = P_1 V_1 = P_2 V_2 = K$

Legge di Boyle
 $t_1 > t_2 > t_3$
 P₀, V₀ valori a 0°C
 P₁, V₁ valori a t₁°C
 P₂, V₂ valori a t₂°C

→ **ISOBARICA** P = costante, cambiano V e t

$V = V_0 T / 273$
 $V = V_0 (1 + \alpha t)$

Legge di Gay-Lussac

NB la pressione che rimane costante non compare nella formula!

$\alpha = 1/273^\circ\text{C}^{-1}$ coefficiente di dilatazione dei gas a volume costante. Si nota che in confronto a quello dei solidi è circa 100 volte più grande! Come già detto i gas si dilatano molto di più dei solidi e dei liquidi.

$= 3,6610^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

→ **ISOMETRICA** V = costante, cambiano P e t (isocorica o isovolumica)

$P = P_0 T / 273$
 $P = P_0 (1 + \beta t)$

Legge di Charles

NB il volume che rimane costante non compare nella formula!

$\beta = 1/273^\circ\text{C}^{-1}$ coefficiente di dilatazione dei gas a volume costante. Si nota che in confronto a quello dei solidi è circa 100 volte più grande! Come già detto i gas si dilatano molto di più dei solidi e dei liquidi.

$= 3,6610^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

NB $\alpha = \beta$



GENERALE cambiano P, V e t

$$PV = V_0 P_0 T / 273$$

$$PV = P_0 V_0 (1 + t / 273)$$

Analogamente a quanto detto per le dilatazioni dei solidi, la difficoltà di utilizzare le relazioni sopra riportate, sta nel fatto che in generale non si conoscono i valori di P e V a 0°C, ma quelli alla temperatura iniziale. Al contrario di quanto è consentito per i solidi, a causa della grande dilatabilità dei gas, non possiamo confondere i valori P₀, V₀ con P_i e V_i perché gli errori sarebbero grandi. Le possibili alternative percorribili sono due.

1 La prima è tipica della chimica, attinge dalla legge di Avogadro, dal concetto di mole ed al fatto che all'aumentare della quantità di gas aumentano la pressione e/o il volume

mole di un gas mol quantità di gas pari al peso atomico o molecolare

legge di Avogadro Volumi uguali di gas diversi, in identiche condizioni di temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole.

numero di Avogadro N_A = 6,02 • 10²³ quantità di atomi o molecole contenute in una mole di un qualsiasi gas

Per una mole di gas alla temperatura di 0°C e ad una atmosfera, il volume occupato è V₀

P₀ = 101325 Pa
V₀ = 0,0224 m³

$$P_0 V_0 / 273 = 8,31 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{mole}} = \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mole}}$$

il prodotto è una costante, viene chiamata costante dei gas perfetti ed è indicata con la lettera **R**. La legge generale **per una mole di gas** risulta: **PV = RT**

Se invece che una mole di gas ne abbiamo **n** l'equazione assume la forma successiva ed è chiamata:

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI **PV = nRT**

N.B. Per determinare il numero di moli contenute in una certa massa di gas bisogna dividere la massa per la massa molecolare o (atomica se gas monoatomico):

Supponiamo di avere 432 g di Ossigeno (m.a. = 16 g). Essendo l'ossigeno un gas biatomico, normalmente si trova sempre nella forma O₂, la sua massa molecolare è quindi 32 g. Dividendo 432 per 32 si ottiene il numero 27 che rappresenta proprio il numero di moli di ossigeno.

2 La seconda strada è più tipica della fisica, non si pone il problema di quanto gas si abbia, ma esclusivamente dello stato termodinamico: Pressione, Volume e temperatura

I O F

E' necessario utilizzare le relazioni, *che non diremo più rigorose ma corrette*, per determinare ad esempio i valori ad una certa temperatura t_f, nota la temperatura iniziale t_i. Per questo si determinano prima i valori che il gas avrebbe a 0°C (I₀), e solo successivamente si determinano quelli finali. Secondo lo schema a lato.

Eseguendo una volta per tutte questa operazione: si scrive la relazione I-0, si scrive la relazione 0-F e se ne fa il rapporto, si semplificano V_0 e P_0 comuni a numeratore e denominatore e si ottiene la relazione corretta.

EQUAZIONE GENERALE DEI GAS PERFETTI

$$\frac{P_i V_i = \frac{P_0 V_0 T_i}{273}}{P_f V_f = \frac{P_0 V_0 T_f}{273}} \Rightarrow \frac{P_i V_i = T_i}{P_f V_f = T_f} \Rightarrow (3) \quad \boxed{P_f V_f = \frac{P_i V_i T_f}{T_i}}$$

OSSERVA	E' possibile ottenere dall'equazione generale tutte e tre le relazioni elementari:		
$T_f = T_i$	$\frac{P_i V_i = T_i}{P_f V_f = T_i}$	$\Rightarrow P_i V_i = P_f V_f$	\Rightarrow ISOTERMA
$P_f = P_i$	$\frac{P_i V_i = T_i}{P_i V_f = T_f}$	$\Rightarrow V_f = \frac{V_i T_f}{T_i}$	\Rightarrow ISOBARA
$V_f = V_i$	$\frac{P_i V_i = T_i}{P_f V_i = T_f}$	$\Rightarrow P_f = \frac{P_i T_f}{T_i}$	\Rightarrow ISOCORA

5 moli di un gas perfetto si trovano all'interno di una macchina termica alla temperatura di 627°C ed alla pressione di 300 kPa. La macchina compie una trasformazione ciclica formata da 3 trasformazioni elementari: una prima trasformazione isoterma nella quale la pressione si riduce a 100 kPa, quindi una trasformazione isobarica che riporta il gas nella stessa condizione di volume iniziale ed infine una trasformazione isovolumica con la quale il gas ritorna alle condizioni iniziali.

Si vuole calcolare il lavoro compiuto durante il ciclo, il calore assorbito, ed il rendimento del ciclo, supponendo che non vi siano attriti.

Osservazioni:

a) Raffigurare il ciclo sul diagramma PV non è indispensabile, ma aiuta a ragionare sulle singole trasformazioni e soprattutto ad attribuire i corretti valori di ciascun parametro P,V,T a ciascuno stato.

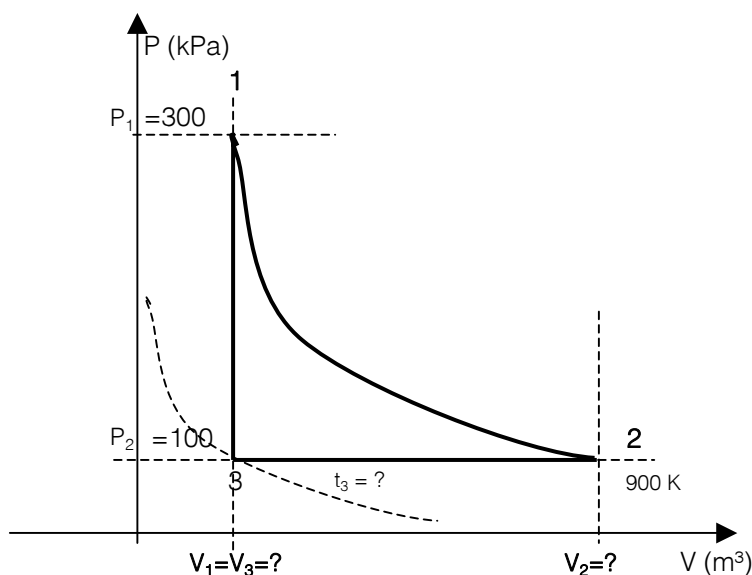
b) Ricordarsi che la temperatura da inserire nelle formule utili deve essere espressa in gradi Kelvin.

c) Ricordarsi che 1 kPa = 10³ Pa.

Per poter rispondere alla prima domanda è INDISPENSABILE determinare prima tutti i parametri PVT caratteristici di ciascuno stato termodinamico.

Dati:

		n= 5	moli		
1	P ₁ =	300.000 Pa	T ₁ =T ₂ =	900 K	V ₁ = da determinare
2	P ₂ =	100.000 Pa	T ₃ =	da determinaare	V ₂ = da determinare
3	P ₃ =P ₂ =	100.000 Pa			V ₃ =V ₁ = da determinare



PV= nRT	1.a
PV= NKT	1.b
P ₁ V ₁ T ₂ =P ₂ V ₂ T ₁	1.c

n = numero di moli
 R = 8,31 J/Kmol
 N = numero di molecole
 K = 1,37E-23 J/K

ΔU=3/2nRΔT	2.a
ΔU=3/2(P ₂ V ₂ -P ₁ V ₁)	2.b
ΔU=3/2NKΔT	2.c

L=PΔV ISOBARICA 3

L=nRTln(V_f/V_i) ISOTERMICA 4.a

L=NKTln(V_f/V_i) 4.b

L=PVln(V_f/V_i) 4.c

ΔU=Q-L 5

L = Q_{ass}-Q_{ced} 6

r = L/Q_{ass} 7.a

r = 1-Q_{ced}/Q_{ass} 7.b

Si passa ora a determinare tutti i valori di stato incogniti:

dalla 1.a	V ₁ =nRT/P ₁ = 5*8,31*900/300000	0,125 m ³
dalla 1.c, essendo T ₁ =T ₂	V ₂ =V ₁ P ₁ /P ₂ = 0,1254*300000/100000	0,374 m ³
dalla 1.c, essendo P ₁ =P ₂	T ₃ =T ₂ V ₃ /V ₂ = 900*0,1254/0,374	300,000 K
in alternativa dalla 1.a,	T ₃ =P ₃ V ₃ /nR = 100000*0,374/5*8,31	300,000 K

Ora è possibile passare al calcolo del lavoro. Per questo le formule da utilizzare sono la 3, e le 4. Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 dalla 4,a (trasf. isoterma)	L ₁₋₂ =nRTln(V ₂ /V ₁) = 5*8,31*900*ln(0,374/0,125)	41,083 kJ
in alternativa dalla 4.c	L ₁₋₂ =P ₂ V ₂ ln(V ₂ /V ₁) = 100,000*0,374*ln(0,374/0,125)	41,083 kJ

Esempio1 ciclo termodinamico

2-3 dalla 3 (trasf. isobarica)	$L_{2-3}=P_2(V_3-V_2) = 100,000*(0,125-0,374)$	-	24,930 kJ
3-4 per una trasformazione isovolumca	$L = 0$		0 kJ

Il lavoro totale, pari all'area interna al diagramma PV, è la somma dei lavori di ciascuna trasformazione

16,153 kJ ←

Come noto un ciclo termodinamico funziona sul fatto che in ogni trasformazione viene scambiato calore per ottenere lavoro e/o cambiamento della energia interna del gas (variazione di temperatura). Il rendimento esprime quanta frazione di energia fornita (calore) viene effettivamente trasformata in lavoro. Per calcolare il valore del rendimento del ciclo è necessario determinare prima i calori scambiati in ciascuna trasformazione. Le formule da utizzarsi sono le 2 e la 5.

Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 Per determinare il calore Q_{12} è necessario calcolare prima ΔU_{12} con la 2.a. e quindi usare la 5

Per una isotermica $\Delta U = 0$, dalla 5 $Q_{1-2}=L_{1-2}$ 41,083 kJ

2-3 $\Delta U_{2-3} = 3/2 nR \Delta T_{2-3} = 3/2 * 5 * 8,31 * (300-900)$ -37,395 kJ

2-3 *in alternativa dalla 2.b,* $\Delta U_{2-3} = 3/2 (P_3 V_3 - P_2 V_2) = 3/2 * (100,000 * 0,125 - 100,00 * 0,374)$ -37,395 kJ

$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + L_{2-3} = -37,395 - 24,930$ - 62,325 kJ

3-1 $\Delta U_{3-1} = 3/2 nR \Delta T_{3-1} = 3/2 * 5 * 8,31 * (900-300)$ 37,395 kJ

Per una isovolumica $L = 0$, dalla 5 $Q_{3-4} = \Delta U_{3-4}$ 37,395 kJ

Il calore totale fornito (assorbito) è la somma dei calori assorbiti (quelli positivi!) in ciascuna trasformazione: $Q_{ass} = 47,083 + 37,395$ 78,478 kJ

Il calore ceduto è la somma di tutti i calori ceduti (quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{ced} = -62,395$ - 62,325 kJ

Il calore scambiato è la somma di tutti i calori (quelli positivi e quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{sc} = 141,083 + 37,395 - 62,395$ cioè la somma algebrica fra il calore assorbito (positivo) e quello ceduto (negativo)

16,153 kJ ←

Come si nota facilmente dai risultati il calore scambiato nel ciclo è proprio uguale al lavoro del ciclo

Il rendimento si calcola la 7.a $r = L/Q_{ass} = 16,153/78,478$ 0,206 20,6%

in alternativa si utilizza la 7.b $r = 1 - Q_{ced}/Q_{ass} = 1 - 62,325/78,478$ 0,206 20,6%

Considerazioni

Come evidente il lavoro effettivamente ottenuto dal ciclo termodinamico è piuttosto piccolo rispetto a quanta energia abbiamo fornito (20%); alla perdita di energia dovremo poi aggiungere quella persa per attriti ed efficienza del dispositivo meccanico reale.

Proviamo a vedere cosa succederebbe se la nostra macchina ipoteticamente avesse un rendimento massimo uguale a quello del ciclo di Carnot. Indicando con T_F la temperatura della sorgente refrigerante (fredda) e con T_C quella della sorgente calda:

Il rendimento del ciclo di Carnot è: $r = 1 - T_F/T_C = 1 - 300/900$ 0,667 66,7%

E' evidente la miglior prestazione!

ISTITUTO TECNICO NAUTICO ARTIGLIO VIAREGGIO
Esempio2 ciclo termodinamico

27 moli di un gas perfetto si trovano all'interno di una macchina termica alla temperatura di 27°C ed alla pressione di 300 kPa. La macchina compie una trasformazione ciclica formata da 4 trasformazioni elementari: una prima trasformazione isobarica sino ad una temperatura di 277°C, una seconda trasformazione isoterma nella quale la pressione si riduce a 200 kPa, quindi una trasformazione isovolumica che raffredda il gas a 27°C ed infine una trasformazione isoterma con la quale il gas ritorna alle condizioni iniziali.

Si vuole calcolare il lavoro compiuto durante il ciclo, il calore assorbito, ed il rendimento del ciclo, supponendo che non vi siano attriti.

Osservazioni:

a) Raffigurare il ciclo sul diagramma PV non è indispensabile, ma aiuta a ragionare sulle singole trasformazioni e soprattutto ad attribuire i corretti valori di ciascun parametro P,V,T a ciascuno stato.

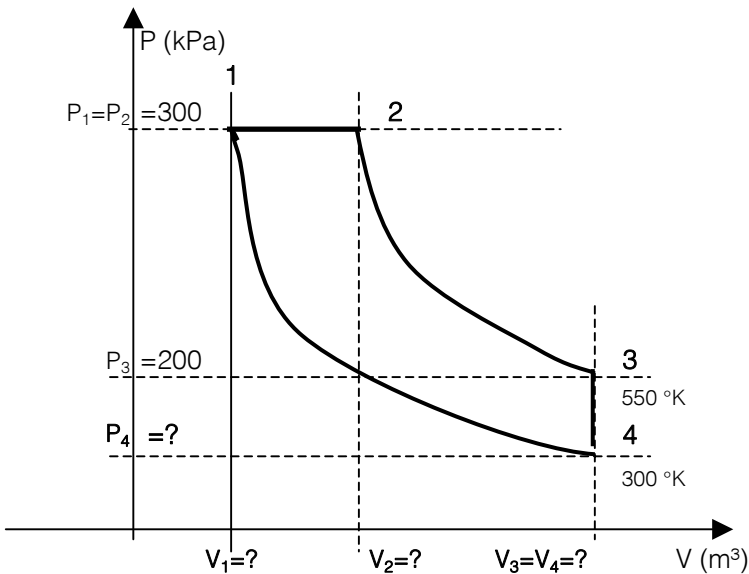
b) Ricordarsi che la temperatura da inserire nelle formule utili deve essere espressa in gradi Kelvin.

c) Ricordarsi che 1 kPa = 10³ Pa.

Per poter rispondere alla prima domanda è INDISPENSABILE determinare prima tutti i parametri PVT caratteristici di ciascuno stato termodinamico.

Dati:

	n= 27	moli		
1	P ₁ =	300.000 Pa	T ₁ =	300 °K
2	P ₂ =P ₁ =	300.000 Pa	T ₂ =	550 °K
3	P ₃ =	200.000 Pa	T ₂ =T ₃ =	550 °K
4	P ₄ =	da determinare	T ₄ =T ₁ =	300 °K
				V ₁ = da determinare
				V ₂ = da determinare
				V ₃ = da determinare
				V ₃ =V ₄ = da determinare



PV= nRT	1.a
PV= NKT	1.b
P ₁ V ₁ T ₂ =P ₂ V ₂ T ₁	1.c

n = numero di moli
R = 8,31 J/Kmol
N = numero di molecole
K = 1,37E-23 J/K

ΔU=3/2nRΔT	2.a
ΔU=3/2(P ₂ V ₂ -P ₁ V ₁)	2.b
ΔU=3/2NKΔT	2.c

L=PΔV ISOBARICA 3

L=nRTln(V _f /V _i)	ISOTERMICA 4.a
L=NKTln(V _f /V _i)	4.b
L=PVln(V _f /V _i)	4.c

ΔU=Q-L 5

L = Q_{ass}-Q_{ced} 6

r = L/Q _{ass}	7.a
r = 1-Q _{ced} /Q _{ass}	7.b

Si passa ora a determinare tutti i valori di stato incogniti:

dalla 1.a	V ₁ =nRT/P ₁ = 27*8,31*300/300000	0,224 m ³
dalla 1.c, essendo P ₁ =P ₂	V ₂ =V ₁ T ₂ /T ₁ = 0,224*550/300	0,411 m ³
dalla 1.c, essendo T ₁ =T ₂	V ₃ =V ₂ P ₂ /P ₃ = 0,411*300000/200000	0,617 m ³
in alternativa dalla 1.a,	V ₃ =nRT ₂ /P ₃ =27*8,31*550/200000	0,617 m ³
dalla 1.c, essendo V ₃ =V ₄	P ₄ =P ₃ T ₄ /T ₃ = 200,000*300/550	109,091 kPa
per verifica dalla 1.c, essendo T ₄ =T ₁	P ₁ =P ₄ V ₄ /V ₁ = 109,091*0,617/0,224	300,000 kPa

Esempio2 ciclo termodinamico

Ora è possibile passare al calcolo del lavoro. Per questo le formule da utilizzare sono la 3, e le 4. Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 dalla 3 (trasformazione isobarica)	$L_{1-2}=P_1(V_2-V_1) = 300,000*(0,411-0,224)$	56,093 kJ
2-3 dalla 4.a	$L_{2-3}=nRT_2\ln(V_3/V_2) = 27*8,31*550*\ln(0,617/0,411)$	50,036 kJ
<i>in alternativa dalla 4.c</i>	$L_{2-3}=P_2 V_2 \ln(V_3/V_2) = 300,000*0,411*\ln(0,617/0,411)$	50,036 kJ
3-4 per una trasformazione isovolumca	$L = 0$	0 kJ
4-1 dalla 4.a	$L_{4-1}=nRT_4\ln(V_1/V_4) = 27*8,31*300*\ln(0,224/0,617)$	-68,092 kJ
<i>in alternativa dalla 4.c</i>	$L_{4-1}=P_4 V_4 \ln(V_1/V_4) = 109,091*0,617*\ln(0,224/0,617)$	-68,092 kJ

Il lavoro totale, pari all'area interna al diagramma PV, è la somma dei lavori di ciascuna trasformazione

38,036 kJ ←

Come noto un ciclo termodinamico funziona sul fatto che in ogni trasformazione viene scambiato calore per ottenere lavoro e/o cambiamento della energia interna del gas (variazione di temperatura). Il rendimento esprime quanta frazione di energia fornita (calore) viene effettivamente trasformata in lavoro. Per calcolare il valore del rendimento del ciclo è necessario determinare prima i calori scambiati in ciascuna trasformazione. Le formule da utizzarsi sono le 2 e la 5.

Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 Per determinare il calore Q_{12} è necessario calcolare prima ΔU_{12} con la 2.a. e quindi usare la 5

	$\Delta U_{1-2} = 3/2 nR \Delta T_{1-3} = 3/2*27*8,31*(580-300)$	84,139 kJ
<i>in alternativa dalla 2.b,</i>	$\Delta U_{1-2} = 3/2 (P_2 V_2 - P_1 V_1) = 3/2*(300,000*0,411 - 100*0,224)$	84,139 kJ

$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} + L_{1-2} = 84,139 + 56,093$ 140,231 kJ

2-3 Per una isoterrmica $\Delta U = 0$, dalla 5 $Q_{2-3} = L_{2-3}$ 50,036 kJ

3-4 $\Delta U_{3-4} = 3/2 nR \Delta T_{3-4} = 3/2*27*8,31*(300-550)$ -84,139 kJ

Per una isovolumca $L = 0$, dalla 5 $Q_{3-4} = \Delta U_{3-4}$ -84,139 kJ

4-1 Per una isoterrmica $\Delta U = 0$, dalla 5 $Q_{4-1} = L_{4-1}$ -68,092 kJ

Il calore totale fornito (assorbito) è la somma dei calori assorbiti (quelli positivi!) in ciascuna trasformazione: $Q_{ass} = 140,231 + 50,036$

190,267 kJ

Il calore ceduto è la somma di tutti i calori ceduti (quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{ced} = -84,139 - 68,092$

- 152,231 kJ

Il calore scambiato è la somma di tutti i calori (quelli positivi e quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{sc} = 140,231 + 50,036 - 84,139 - 68,092$ cioè la somma algebrica fra il calore assorbito (positivo) e quello ceduto (negativo)

38,036 kJ ←

Come si nota facilmente dai risultati il calore scambiato nel ciclo è proprio uguale al lavoro del ciclo

Il rendimento si calcola la 7.a	$r = L/Q_{ass} = 38,036/190,267$	0,200	20,0%
<i>in alternativa si utilizza la 7.b</i>	$r = 1 - Q_{ced}/Q_{ass} = 1 - 152,231/190,267$	0,200	20,0%

Considerazioni

Come evidente il lavoro effettivamente ottenuto dal ciclo termodinamico è piuttosto piccolo rispetto a quanta energia abbiamo fornito (20%); alla perdita di energia dovremo poi aggiungere quella persa per attriti ed efficienza del dispositivo meccanico reale.

Proviamo a vedere cosa succederebbe se la nostra macchina ipoteticamente avesse un rendimento massimo uguale a quello del ciclo di Carnot. Indicando con T_F la temperatura della sorgente refrigerante (fredda) e con T_C quella della sorgente calda:

Il rendimento del ciclo di Carnot è: $r = 1 - T_F/T_C = 1 - 300/550$ 0,455 45,5%

E' evidente la miglior prestazione!

L'esempio proposto è simile a quello precedente, la differenza consiste nel fatto che le due trasformazioni isoterme sono Sostituite da due trasformazioni adiabatiche. Il ciclo così trasformato è sostanzialmente il ciclo Otto.

un gas perfetto si trovano all'interno di una macchina termica (cilindro con pistone) alla temperatura di 17°C ed alla pressione atmosferica pari a 101 kPa. La macchina compie una trasformazione ciclica formata da 4 trasformazioni: una prima compressione adiabatica da un volume di 0,25 dm³ sino ad una temperatura di 1007°C ed un volume di 0,05 dm³, una seconda trasformazione isobarica nella quale il volume si espande a 0,08 dm³, quindi una trasformazione adiabatica che fa espandere il gas a 0,5 dm³ ed infine una trasformazione isovolumica con la quale il gas ritorna alle condizioni iniziali.

Osservazioni:

a) Raffigurare il ciclo sul diagramma PV non è indispensabile, ma aiuta a ragionare sulle singole trasformazioni e soprattutto ad attribuire i corretti valori di ciascun parametro P,V,T a ciascuno stato.

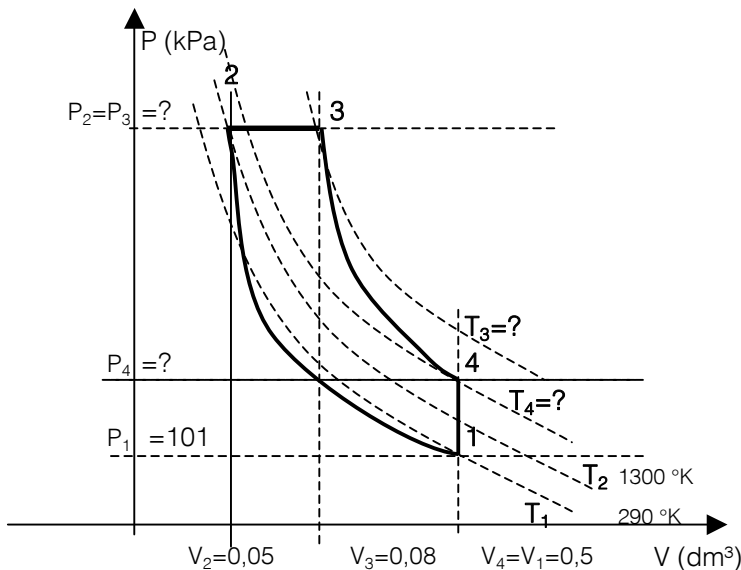
b) Ricordarsi che la temperatura da inserire nelle formule utili deve essere espressa in gradi Kelvin.

c) Ricordarsi che 1 kPa = 10³ Pa.

c) Ricordarsi che 1 dm³ = 10⁻³ m³ = 1 l

Per poter rispondere alla prima domanda è INDISPENSABILE determinare prima tutti i parametri PVT caratteristici di ciascuno stato termodinamico.

	n = ?		moli	°C		°K		dm ³		m ³	
	kPa	Pa									
1	P ₁ =	101	101.000	T ₁ =	17	290	V ₁ =	0,25	0,00025		
2	P ₂ =P ₃ =	da determinare		T ₂ =	1007	1300	V ₂ =	0,05	0,00005		
3	P ₃ =	da determinare		T ₃ =	da determinare		V ₃ =	0,08	0,00008		
4	P ₄ =P ₁ =	101	101.000	T ₄ =	da determinare		V ₄ =V ₁ =	0,25	0,00025		



$PV = nRT$	1.a
$PV = NkT$	1.b
$P_1V_1T_2 = P_2V_2T_1$	1.c

n = numero di moli
R = 8,31 J/Kmol
N = numero di molecole
K = 1,37E-23 J/K

$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$	1.d
---------------------------------	-----

$\gamma = 5/3$ (gas monoatomico) 1,666666667

$\Delta U = 3/2nR\Delta T$	2.a
$\Delta U = 3/2(P_2V_2 - P_1V_1)$	2.b
$\Delta U = 3/2Nk\Delta T$	2.c

$L = P\Delta V$	ISOBARICA 3
-----------------	-------------

$L = nRT \ln(V_f/V_i)$	ISOTERMICA 4.a
$L = NkT \ln(V_f/V_i)$	4.b
$L = PV \ln(V_f/V_i)$	4.c

$\Delta U = Q - L$	5
--------------------	---

$L = Q_{\text{ass}} - Q_{\text{ced}}$	6
---------------------------------------	---

$r = L/Q_{\text{ass}}$	7.a
------------------------	-----

$r = 1 - Q_{\text{ced}}/Q_{\text{ass}}$	7.b
---	-----

Si passa ora a determinare tutti i valori di stato incogniti:

dalla 1.a	$n = P_1V_1/RT_1 = 101000 \cdot 0,00025 / (8,31 \cdot 290)$	0,0105 mol
dalla 1.a	$P_2 = P_3 = nRT_2/V_2 = 0,021 \cdot 8,31 \cdot 1300 / 0,00005$	2.263,793 kPa

in alternativa dalla 1.c,	$P_2 = P_3 = T_2 V_1 P_1 / T_1 V_2 = 1300 * 0,00025 * 101,000 / (290 * 0,00005)$	2.263,793 kPa
dalla 1.c, essendo $P_2 = P_3$	$T_3 = V_3 T_2 / V_2 = 0,00008 * 1300 / 0,00005$	2.080 °K
dalla 1.d	$P_4 = P_3 (V_3 / V_4)^\gamma = 2263,796 * (0,00008 / 0,00005)^{5/3}$	338,912 kPa
dalla 1.c	$T_4 = V_4 P_4 / nR = 0,00025 * 213501 / (0,021 * 8,31)$	973,113 °K
in alternativa dalla 1.c,	$T_4 = P_4 V_4 T_3 / P_3 V_3 = 338,912 * 2080 * 0,00025 / (2263,793 * 0,00008)$	973,113 °K
per verifica dalla 1.c, essendo $V_4 = V_1$	$P_1 = P_4 T_1 / T_4 = 338,912 * 290 / 973,113$	101,000 kPa

Ora è possibile passare al calcolo del lavoro. Per questo le formule da utilizzare sono la 2, 3, e le 5. Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 per una trasformazione adiabatica il lavoro si calcola dalla 4, è prima necessario determinare la variazione di energia interna da una delle 2		
dalla 2.a	$\Delta U_{1-2} = 3/2 nR(T_2 - T_1) = 3/2 * 0,021 * 8,31(1300 - 290)$	0,132 kJ
dalla 4, essendo $Q=0$	$L_{1-2} = -\Delta U_{1-2} = -132$	- 0,132 kJ
2-3 dalla 3	$L_{2-3} = P_2(V_3 - V_2) = 2263,793(0,00008 - 0,00005)$	0,068 kJ
3-4 come per la 1-2, per una trasformazione adiabatica, il lavoro si calcola dalla 4, è prima necessario determinare la variazione di energia interna da una delle 2		
dalla 2.a	$\Delta U_{3-4} = 3/2 nR(T_4 - T_3) = 3/2 * 0,021 * 8,31(973,113 - 2080)$	- 0,145 kJ
in alternativa dalla 2.b	$\Delta U_{3-4} = 3/2(P_4 V_4 - P_3 V_3) = 3/2(338,912 * 0,00025 - 2263,793 * 0,00008)$	- 0,145 kJ
	$L_{3-4} = -\Delta U_{3-4}$	0,145 kJ

in alternativa dalla 2.b, mettendo in evidenza V_3	$\Delta U_{3-4} = 1,5 V_3 (P_4 V_4 / V_3 - P_3)$	
dalla 1.d $P_3/P_4 = V_4^\gamma / V_3^\gamma$ elevando tutto alla $1/\gamma$, $V_4/V_3 = P_3^{1/\gamma} / P_4^{1/\gamma}$ sostituendo e sviluppando		
$L_{3-4} = \Delta U_{3-4} = 1,5 V_3 (P_3^{1/\gamma} P_4^{(\gamma-1)/\gamma} - P_3)$ per un gas monoatomico $\gamma = 5/3$		
	$L_{3-4} = 1,5 V_3 (P_3^{3/5} P_4^{2/5} - P_3) = 1,5 * 2263,793(2263,793^{3/5} * 338,912^{2/5} - 2263,793)$	0,145 kJ

3-4 per una trasformazione isovolumica	$L = 0$	0 kJ
Il lavoro totale, pari all'area interna al diagramma PV, è la somma dei lavori di ciascuna trasformazione		0,081 kJ ←

Come noto un ciclo termodinamico funziona sul fatto che in ogni trasformazione viene scambiato calore per ottenere lavoro e/o cambiamento della energia interna del gas (variazione di temperatura). Il rendimento esprime quanta frazione di energia fornita (calore) viene effettivamente trasformata in lavoro. Per calcolare il valore del rendimento del ciclo è necessario determinare prima i calori scambiati in ciascuna trasformazione. Le formule da utizzarsi sono le 2 e la 5.

Si inizia come sopra dalla prima trasformazione 1-2 e poi si procede con le altre.

1-2 IL calore Q_{12} è noto in quanto trasformazione adiabatica		
	Q_{1-2}	0,000 kJ
2-3 Per una isobarica	$\Delta U_{2-3} = 3/2 nR \Delta T_{2-3} = 3/2 * 27 * 8,31 * (2080 - 1300)$	0,102 kJ
Per una isobarica dalla 5	$Q_{2-3} = \Delta U_{2-3} + L_{2-3}$	0,170 kJ
3-4 IL calore Q_{34} è noto in quanto trasformazione adiabatica		
	Q_{3-4}	0,000 kJ
4-1 Per una isovolumica $\Delta U = Q$, dalla 5	$\Delta U_{4-1} = Q_{4-1}$	
	$\Delta U_{4-1} = 3/2 nR \Delta T_{4-1} = 3/2 * 27 * 8,31 * (290 - 613)$	-0,089 kJ

Il calore totale fornito (assorbito) è la somma dei calori asorbiti (quelli positivi!) in ciascuna trasformazione: $Q_{\text{ass}} = 0,340$ 0,170 kJ

Il calore ceduto è la somma di tutti i calori ceduti (quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{\text{ced}} = -0,084$ - 0,089 kJ

Il calore scambiato è la somma di tutti i calori (quelli positivi e quelli negativi) in ciascuna trasformazione: $Q_{sc} = 140,231 + 50,036 - 84,139 - 68,092$ cioè la somma algebrica fra il calore assorbito (positivo) e quello ceduto (negativo)



0,081 kJ

Come si nota rfacilmente dai risulati il calore scambiato nel ciclo è proprio uguale al lavoro del ciclo

Il rendimento si calcola la 7.a	$r = L/Q_{ass} = 0,255/0,34$	0,475	47,5%
<i>in alternativa si utilizza la 7.b</i>	$r = 1 - Q_{ced}/Q_{ass} = 1 - 152,231/190,267$	0,475	47,5%

Considerazioni

Come evidente il lavoro effettivamente ottenuto dal ciclo termodinamico è piuttosto piccolo rispetto a quanta energia abbiamo fornito (47,5%); alla perdita di energia dovremo poi aggiungere quella persa per attriti ed efficienza del dispositivo meccanico reale.

Proviamo a vere cosa succederebbe se la nostra macchina ipoteticamente avesse un rendimento massimo uguale a quello del ciclo di Carnot. Indicando con T_F la temperatura della sorgente refrigerante (fredda) e con T_C quella della sorgente calda:

Il rendimento del ciclo di Carnot è: $r = 1 - T_F/T_C = 1 - 290/2080$ 0,861 86,1%

E' evidente la miglior prestazione!

ISTITUTO TECNICO NAUTICO ARTIGLIO VIAREGGIO
Trasformazioni e lavoro

Trasformazione	Equazione	Grafico	Lavoro	Energia interna	1° Principio
Isotermica $\Delta T=0$	$P_1 V_1 = P_2 V_2$		$L = n C_v T \ln(V_f/V_i)$ (area) $\Delta V > 0 \rightarrow L > 0$	$\Delta U = n C_v \Delta T$ $\Delta T > 0 \rightarrow \Delta U > 0$	$Q = L + \Delta U$ Tutto il calore diventa lavoro
Isobarica $\Delta P=0$	$V_1/T_1 = V_2/T_2$		$L = P(V_f/V_i)$ (area)	$\Delta U = n C_v R \Delta T$	$Q = L + \Delta U$ Parte del calore diventa lavoro parte varia l'energia interna.
Isovolumica $\Delta V=0$	$V_1/T_1 = V_2/T_2$		$L=0$ non c'è area! $\Delta V=0 \rightarrow L=0$	$\Delta U = n C_v R \Delta T$	$Q = L + \Delta U$ Tutto il calore varia l'energia interna.
Adiabatica $\Delta Q=0$	$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$ $\gamma = C_p/C_v$		(area) formula complessa $\Delta V > 0 \rightarrow L > 0$	$\Delta U = n C_v R \Delta T$ $Q=0$	$Q + L = -\Delta U$ Il lavoro viene fatto a spese dall'energia interna

C_p = calore specifico a pressione costante
 C_v = calore specifico a volume costante

gas monoatomico = 5/2R, biatomico = 7/2R, triatomico = 9/2R, ...